$f, g : A \to \mathbb{R}$

i) $\inf(-f) = -\sup f$ κ $\sup(-f) = -\inf f$

ii) $(\forall x \in A) \quad f(x) \le g(x) \Rightarrow \begin{cases} \sup f \le \sup g \\ \inf f \le \inf g \end{cases}$

iii) $\sup(f+g) \le \sup f + \sup g$ iv) $\sup(f+g) \ge \sup f + \inf g$

v) $\sup(f+c) = \sup f + c$, $c \in \mathbb{R}$

vi) $\sup(|c| f) = |c| \sup f$, $c \in \mathbb{R}$

$\sup f = \sup R(f)$

$\inf f = \inf R(f)$

Αποδ ii)

x τυχόν $x \in A$

$f(x) \le g(x) \le \sup g$ Το $\sup g$ είναι άνω φράγμα της f ($R(f)$)

Άρα (sup ελ. από τα άνω φρ.) $\sup f \le \sup g$

Αποδ. iii) x τυχόν $x \in A$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \le \underbrace{\sup f + \sup g}_{\text{άνω φράγμα}}$

Άρα $\sup f + \sup g$ είναι άνω φράγμα της $f+g$

Επομένως $\sup(f+g) \le \sup f + \sup g$.

$(\sup f + \inf g \leq \sup(f+g) \leq \sup f + \sup g)$

Αποδ. iv) ~~x τυχόν ∈ A~~

$\sup f = \sup[(f+g)-g] \Rightarrow \sup f = \sup[(f+g)+(-g)] \leq$

$\leq \sup(f+g) + \sup(-g) \overset{(i)}{=} \sup(f+g) - \inf g \Leftrightarrow$

$\sup f + \inf g \leq \sup(f+g)$

Αποδ. v) ~~$\sup f + \inf c \overset{iv}{\leq} \sup(f+c) \overset{iii}{\leq} \sup f + \sup c$~~

$\sup f + c = \sup f + \sup c \overset{(iv)}{\leq} \sup(f+c) \overset{(iii)}{\leq} \sup f + \sup c = \sup f + c$

Άρα $\sup f + c \leq \sup f + c$

Αποδ. vi) Αν $c=0$ ισχύει

Έστω $c \neq 0$

Τότε για τυχόν $x \in A$ έχουμε:

$(|c| f)(x) = |c| f(x) \leq |c| \sup f$

άνω φράγμα για την $(|c| f)(x)$

Άρα $\sup(|c| f)(x) \leq |c| \sup f$ ⊛

$\sup f = \sup\left[\frac{1}{|c|}(|c| \cdot f)\right] \overset{*}{\leq} \frac{1}{|c|} \sup(|c| f) \Rightarrow |c| \sup f \leq \sup(|c| f)$

Από τα παραπάνω έπεται η ισότητα.

σελ 79 βιβλ. Έστω E διατεταγμένο σύνολο. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i) Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο έχει supremum (του E)

ii) Κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο έχει infimum. (—"—)

(Δεν είναι υποχρεωτικό ένα φραγμένο άνω σύνολο έχει supremum, το αντίστοιχο ισχύει και για το infimum)

A

← $b = \sup B$

το σύνολο των κάτω φραγμάτων

Αποδ (ii) ⇒ iii)

Έστω ισχύει το i)

κ' έστω επιπλέον ότι A είναι μη κενό κ' κάτω φραγμένο υποσύνολο του E. Θ.δ.ο υπάρχει το $\inf A$

Έστω B το σύνολο των κάτω φραγμάτων του A

Τότε $B \neq \emptyset$

Επίσης $\forall$ αν $y \in B$, δηλ y κάτω φράγμα του A.

ισχύει ότι $y \leq x$ για όλα τα $x \in A$.

Άρα κάθε $x \in A$ είναι άνω φράγμα του B.

Δηλαδή το B είναι μη κενό και άνω φραγμένο

Έτσι από το i) υπάρχει supremum. $\sup B = b$.

Αν $x \in A$, το x είναι άνω φράγμα του B $\Rightarrow b = \sup B \leq x$

Δηλ. το b είναι κάτω φράγμα του A.

Δηλ. $b \in B$

z κάτω φράγμα του A, δηλ. $z \in B$ τότε $z \leq \sup B = b$

Άρα $b = \inf A$

Θεώρημα του (Knaster)

Έστω A πεπερασμένο διατεταγμένο σύνολο με μέγιστο κ' ελάχιστο στοιχείο κ' $\varphi : A \to A$ αύξουσα. Τότε υπάρχει $\alpha \in A$: $\varphi(\alpha) = \alpha$

$\leq$ η διάταξη του A

$$X = \{ x \in A : x \leq \varphi(x) \}$$

$X \neq \emptyset$ γιατί $\min A \in X$

$\min A \leq \varphi(\min A) \in A$

Το X είναι άνω φραγμένο. (από το $\max A$)

X μη κενό και άνω φραγμένο $\xRightarrow{\text{Αξίωμα}}$ υπάρχει το $\sup X = \alpha \in A$

y τυχόν, $y \in X$ ίσχυει $y \leq \varphi(y)$ $\xRightarrow{\varphi\nearrow}$ ~~$\varphi(y) \leq \varphi(\varphi(y))$~~

$y \leq \alpha = \sup X$ $\Rightarrow$

$y \leq \alpha \xRightarrow{\varphi\nearrow} \varphi(y) \leq \varphi(\alpha)$

$\Rightarrow y \leq \varphi(\alpha)$ Άρα $\varphi(\alpha)$ άνω φράγμα του X

δηλ. $\boxed{\alpha \leq \varphi(\alpha)}$ (*) (αφού $\alpha = \sup X$)

(*) $\xrightarrow{\varphi\nearrow}$ $\Rightarrow \varphi(\alpha) \leq \varphi(\varphi(\alpha))$ $\Rightarrow \varphi(\alpha) \in X$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\varphi(\alpha) \leq \sup X = \alpha}$

Άρα $\underline{\varphi(\alpha) = \alpha}$

ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ

πχ ακολουθία (είναι οικογένεια)

ένωση οικογένειας πχ $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : (\exists i \in I)\, x \in A_i\}$

$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$\alpha_\nu \quad \alpha(\nu)$

τομή οικογένειας $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : (\forall i \in I)\, x \in A_i\}$

$\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} A = \{0\}$

$\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} A = [-1,1]$

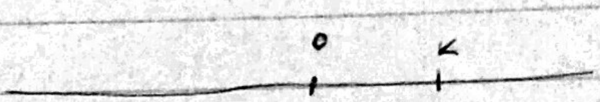
$$A_\nu = \left(-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right), \ \nu\in\mathbb{N}$$

Παρατηρούμε ότι $(\forall \nu\in\mathbb{N})\ \ 0 \in \left(-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right)$

$$0 \in \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) = \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu$$

Υποθέτουμε ότι $(\exists \kappa\in\mathbb{R},\ \kappa\neq 0)\ \ \kappa \in \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu$

Έστω $\kappa > 0$

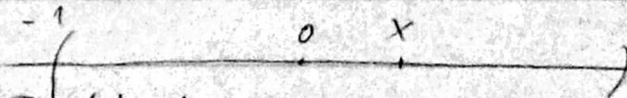


Τότε $(\exists \nu_0\in\mathbb{N})\ \ \frac{1}{\nu_0} < \kappa \ \ \left(\nu_0 > \frac{1}{\kappa}\right)$

Τότε $\kappa \notin \left(-\frac{1}{\nu_0}, \frac{1}{\nu_0}\right)$ Άρα το $\kappa \notin \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu$

$(\forall \nu\in\mathbb{N})\ \ \left(-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) \subseteq (-1,1)$

Άρα $\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu \subseteq (-1,1)$



Έστω x τυχόν $x \in (-1,1) = A_1 \subseteq \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu$

Άλλο παράδειγμα:

→ $B_\nu = \left(0, \frac{1}{\nu}\right], \ \nu\in\mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} B_\nu = \emptyset$

→ $B_\nu = \left(-1+\frac{1}{\nu}, 1-\frac{1}{\nu}\right), \ \nu\in\mathbb{N}-\{1\}$

$\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} B_\nu \stackrel{?}{=} [-1,1]$

Ασκ. $f: A \to B$

$X_i,\ i \in I$ οικογένεια $\in \mathcal{P}(A)$

$Y_i,\ i \in I$ —//— $\in \mathcal{P}(B)$

τότε: $f\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(X_i)$

$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} Y_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(Y)$ $\quad (x \in f^{-1}(Y) \Leftrightarrow f(x) \in Y)$

Λύση

$(\exists x \in \bigcup_{i\in I} X_i)$

y τυχόν, $y \in f\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists i_0 \in I)\ x \in X_{i_0}$ κ $y = f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists i_0 \in I)\ y \in f(X_{i_0}) \Leftrightarrow y \in \bigcup_{i\in I} f(X_i)$

ii) x τυχόν: $x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(Y_i) \Leftrightarrow (\forall i \in I)\ x \in f^{-1}(Y_i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall i \in I)\ f(x) \in Y_i \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in I} Y_i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} Y_i\right)$

Άσκηση

$\bigcup_{i\in I} A_i - \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J}(A_i - B_j)\right)$

$I = \{1,2,3\}$ $\qquad J = \{1,2\}$